Komplexní čísla 2:
Jednoduché rovnice v $\mathbb{C}$, geometrická interpretace $\mathbb{C}$ a goniometrický tvar komplexních čísel

Z minula si připomeňme, že každé komplexní číslo má tvar

$$\boxed{\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}}$$

kde reálnému číslu a říkáme **reálná část** a reálnému číslu b říkáme **imaginární část**.

Jednoduché rovnice v $\mathbb{C}$

Příklad 1. *Určete $x, y \in \mathbb{R}$, aby platilo:*

$$x(1+i) + y(1-i) = 4 + 2i.$$

Řešení. Napravo je komplexní číslo v algebraickém tvaru, i levou stranu tedy upravíme do algebraického tvaru: $x(1+i) + y(1-i) = x + xi + y - yi = (x+y) + (x-y)i$. Máme tedy

$$(x+y) + (x-y)i = 4 + 2i.$$

Reálná část napravo musí být stejná jako nalevo, proto musí platit $x + y = 4$, a podobně i s imaginární, tj. $x - y = 2$, získáme tak soustavu

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2, \end{cases}$$

která má řešení $x = 3, y = 1$. □

A teď vy:

Příklad 2. *Vyřešte rovnici $x(y+i) + y(x-i) = \overline{2x - 2yi}$ pro $x, y \in \mathbb{R}$.* [$x = 0, y = 0$ nebo $x = 3, y = 1$]

V předchozích dvou příkladech jsme rovnici ve skutečnosti rozdělili na dvě rovnici, jednu pro $\mathbf{Re}(z)$ a druhou pro $\mathbf{Im}(z)$. V následujících příkladech už budeme s komplexními čísly provádět i algebraické operace:

Příklad 3. *Řešte rovnici s neznámou $z \in \mathbb{C}$:*

$$z = 3i(z-i) - 5z.$$

Řešení. Příklady tohoto typu můžeme řešit dvěma způsoby:

a) Použijeme fakt, že když je $z \in \mathbb{C}$, tak můžeme psát $z = a + bi$ pro nějaká reálná čísla a, b a tento výraz substituujeme do rovnice. Dostaneme pak rovnici

$$a + bi = 3i(a + bi + i) - 5(a + bi),$$

kterou (s trochou námahy) upravíme na

$$a + bi = (3 - 3b - 5a) + (3a - 5b)i$$

a vyřešíme způsobem z předchozího příkadu a dostaneme $a = \frac{2}{5}, b = \frac{1}{5}$, a tedy $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$.

b) Budeme se z neohroženě pracovat jako s běžným číslem:

$$\begin{aligned} z &= 3i(z-i) - 5z \\ z + 5z &= 3i(z-i) \\ 6z &= 3iz - 3i^2 \\ 6z - 3iz &= -3i^2 \\ z(6-3i) &= 3 \\ z &= \frac{3}{6-3i} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i \end{aligned}$$

□

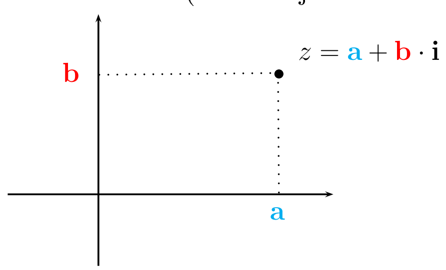
A teď zase vy:

Příklad 4. *Vyřešte rovnici s neznámou* $z \in \mathbb{C}$: $(z+i)(z-3i) = z(z-i)$. $[z = -3i]$

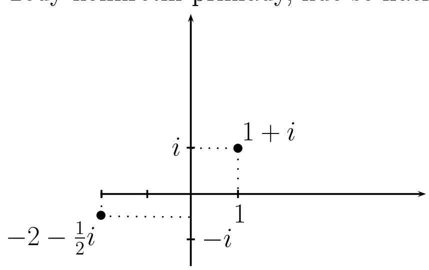
Příklad 5. *Vyřešte rovnici s neznámou* $z \in \mathbb{C}$: $2z + 3\overline{z} = 5 + i$. [mám $z = a + bi \to$ jak vypadá $\overline{z}$?; $z = -3i$]

Příklad 6. *Vyřešte rovnici s neznámou* $z \in \mathbb{C}$: $z \cdot \overline{z} - z = \overline{6 - 2i}$. $[z \in \emptyset]$

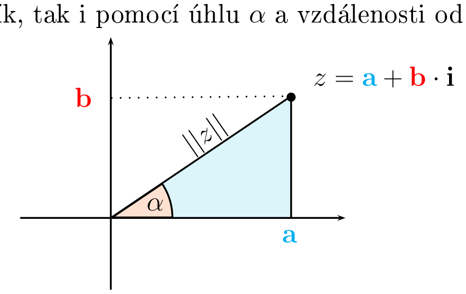
Geometrická představa $\mathbb{C}$ Již jsme si snad zvykli, že každé komplexní číslo z můžeme zapsat pomocí jeho algebraického tvaru $z = \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}$. Čísla $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ale můžeme využít i jako souřadnice, aneb představovat si číslo z zároveň jako bod v rovině (občas se jí říká **Gaussova rovina**):



Tedy konkrétní příklady, kde se nacházejí některá komplexní čísla:



Bod v rovině však umíme popsat nejen pomocí souřadnic x, y, ale, když si představíme vhodný pravoúhlý trojúhelník, tak i pomocí úhlu α a vzdálenosti od počátku souřadnic $||z||$:



Jak informace $||z||$ a α získáme?

- vzdálenost od počátku (často označováná $|z|$ a zvaná **absolutní hodnota komplexního čísla**) z Pythagorovy věty pro trojúhelník na obrázku: $||z||^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$, tedy

$$\boxed{||z|| = \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}}$$

  (Častou chybou je do odmocniny společně s $\mathbf{b}$ přidat i i a počítat $(\mathbf{bi})^2 = \mathbf{b}^2 i^2 = -\mathbf{b}^2$ a katastrofa je na světě. Pozor na to!)

- úhel $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$ (někdy taky nazývaný **argument** čísla z, $\arg(z)$) zjistíme také pomocí vlastností trojúhelníku na obrázku: umíme totiž zjistit jeho sínus i kosínus:

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{b}}{||z||}$$
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}}{||z||}$$

a pomocí těchto dvou informací umíme zjistit i α (samotný sínus, resp. kosínus by nestačil).

Příklad 7. *Určete absolutní hodnotu a argument komplexního čísla* $-\sqrt{3}+i$.

Řešení. V tomto případě je $\mathbf{a} = -\sqrt{3}$ a $\mathbf{b} = 1$, tedy $||z|| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Dále pak $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ a $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Podmínku $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ splňují dva úhly: $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{5\pi}{6}$, ale podmínku $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ splňuje pouze druhý z nich, tedy zjistili jsme, že $\alpha = \frac{5\pi}{6}$. □

Příklad 8. *Určete absolutní hodnotu a argument komplexního čísla* $1-i$. $[||z|| = \sqrt{2}, \alpha = \frac{7\pi}{4}]$

Příklad 9. *Určete absolutní hodnotu a argument komplexního čísla* $-2+2\sqrt{3}i$. $[||z|| = 4, \alpha = \frac{2\pi}{3}]$

Goniometrický tvar komplexního čísla K čemu jsou absolutní hodnota a argument dobré? Můžeme pomocí nich libovolné komplexní číslo zapsat v jiném formátu (tzv. **goniometrický tvar**), který (jak uvidíme příště) má jednu skvělou vlastnost. Goniometrický tvar funguje takto:

když máme komplexní číslo $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}$, umíme zjistit jeho absolutní hodnotu $||z||$ i argument α a můžeme psát $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i} = ||z||\left(\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}}{||z||}\right) = ||z||\left(\frac{\mathbf{a}}{||z||} + \frac{b}{||z||}\cdot i\right) = ||z||\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)$ a tvar

$$z = ||z||\left(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha\right)$$

je tedy **goniometrický tvar** čísla z.

Příklad 10. *Určete goniometrický tvar čísla* $z = -\sqrt{3}+i$.

Řešení. V Příkladu 7 už jsme potřebná čísla $||z||$ i α spočítali, takže je jen použijme: $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$. □

Všimněte si, že gon. tvar je opravdu jen jiný zápis čísla, protože $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}+i$. Je to podobné, jako když číslo $\frac{1}{2}$ můžeme zapsat i jako $0,5$, jde jen o formu (ale ta může někdy pomoci).

Příklad 11. *Určete goniometrický tvar komplexního čísla* $1-i$. $[1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)]$

(Pokud byste se chtěli zase podívat na nějaká videa k tématu, tak solidní opět kanál *isibalo*: `https://www.youtube.com/playlist?list=PLD-MTmOzXT5OxEf0yFqHm8vjtYY44BUh7` (pro nás jsou teď zajímavá videa č. 10 až 15. Marek Valášek bohužel zbylá videa o $\mathbb{C}$ nemá volně přístupná.)

A nyní trochu praxe:

1.

(a) Řešte pro $x, z \in \mathbb{C}$:

i. $x(1-2i) + 2(x-i) = (2-i)(2+x)$ $[x = 2+2i]$

ii. $\frac{x+i}{2x+1} = \frac{2x-2}{4x-3i}$ $[x = -2+i]$

iii. $z + 2z = 3 + 2i$ $[z = 1 + \frac{2}{3}i]$

iv. $iz(z+1) + 4i - 1 = (z-2i)(iz-3)$ $[z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i]$

v. $2(z+i) + i||z|| = 2+i$ [místo $||z||$ můžete napsat $\sqrt{a^2+b^2}$; $z = 1 - \frac{4}{3}i$]

vi. $z\overline{z} - z = \overline{6-2i}$ $[z = -1-2i$ nebo $z = 2-2i]$

(b) Určete goniometrický tvar následujících čísel:

i. $5i$ $\left[5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$

ii. $-10-10i$ $\left[10\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

iii. 3 $\left[3\left(\cos 0+i\sin 0\right)\right]$

iv. $\sin 30^\circ + i\cos 30^\circ$ [není v gon. tvaru protože u i musí být sínus!; $1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$]

v. $\frac{-1+2i}{1+3i}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Eh???